

jueves, 30 de junio de 2022

Cálculo Diferencial

Aproximación lineal de una función de una variable

Sea $y = f(x)$ una función derivable en $\sqrt{\delta}(x_0)$
Se tiene que para un cambio en la variable independiente x (de x_0 a x_1):

$$df(x_0) = f'(x_0) \cdot \widetilde{dx}^{\Delta x}$$

$$\underline{f(x_1) - f(x_0) = \Delta f(x_0) \approx df(x_0) = f'(x_0) \cdot (x_1 - x_0)} \quad ; \text{ Siempre que}$$

$$\begin{aligned} &dx \rightarrow 0 \\ &\text{o } x_1 \rightarrow x_0 \\ &\text{o } x_1 \text{ muy cercano a } x_0 \end{aligned}$$

⇓

$$f(x_1) - f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot (x_1 - x_0)$$

$$f(x_1) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x_1 - x_0), \quad x_1 \text{ muy cercano a } x_0$$

El valor x_1 es variable. Por tanto en la vecindad $\mathcal{V}_\delta(x_0)$

se tiene

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0), \quad \forall x \in \mathcal{V}_\delta(x_0)$$

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot x - x_0 f'(x_0)$$

$$f(\boxed{x}) \approx \underbrace{(f(x_0) - x_0 f'(x_0))}_{b} + \underbrace{f'(x_0)}_{m} \cdot \boxed{x}$$

$$f(x) \approx$$

$b +$

$m \cdot x$

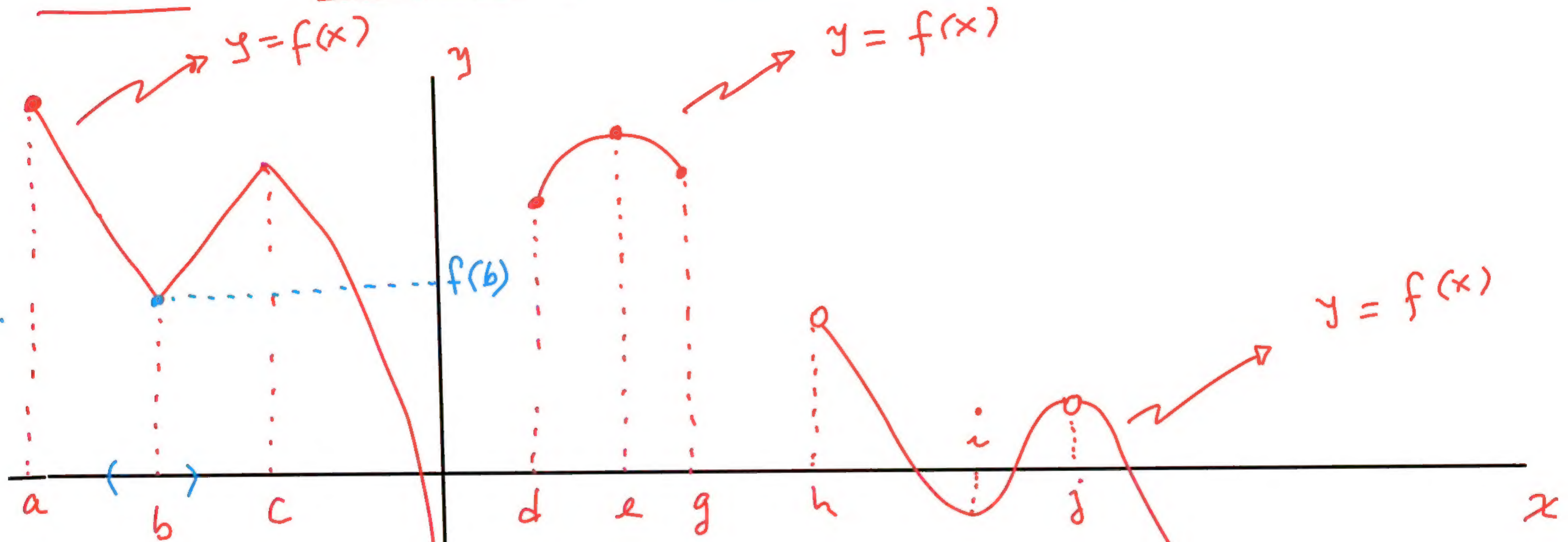
$$f(x) \approx \underbrace{mx + b}$$

ecuación de una recta.

(aproximación ^{afín} lineal de la
función $g = f(x)$ en la vecindad
 $\sqrt{\delta}(x_0)$).

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Extremos Relativos de una función $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



- a) En $x=b$ existe un valor mínimo relativo o local ($f(b)$) de la función $y=f(x)$
 b) En $x=i$ existe un valor mínimo ✓ ✓ ✓ ($f(i)$) ✓ ✓ $y=f(x)$

Note que $f'(b) = \neq$
 $f'(i) = 0$

Además en $x=c$ y en $x=e$, f posee extremos máximos locales, cuyos valores son respectivamente $f(c)$ y $f(e)$.

Note que $f'(c) = \neq$, $f'(e) = 0$
siendo $x=c$, $x=e$ puntos del INTERIOR del dominio de la función f continua en vecindades de los mismos.

Definición de máximo local de una función $y = f(x)$

Sea $y = f(x)$ una función continua en una vecindad del punto $x = x_0$ (f es continua $\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$), $x_0 \in \text{Int}(\text{Dom}(f))$. Decimos que el valor máximo local de la función $y = f(x)$ ocurre en $x = x_0$ si y solo si:

$$f(x_0) \geq f(x), \quad \forall x \in \mathcal{V}_\delta(x_0)$$

Definición de mínimo local de una función $y = f(x)$

Sea $y = f(x)$ una función continua en una vecindad del punto $x = x_0$ (f es continua $\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$), $x_0 \in \text{Int}(\text{Dom}(f))$. Decimos que el valor mínimo local de la función $y = f(x)$ ocurre en $x = x_0$ si y solo si:

$$f(x_0) \leq f(x), \quad \forall x \in \mathcal{V}_\delta(x_0)$$

Definición de máximo GLOBAL de una función $y = f(x)$

Sea

$$f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = y$$

Decimos que f tiene un máximo GLOBAL o ABSOLUTO en $x = x_0$ si y solo si

$$f(x_0) \geq f(x),$$

$$\forall x \in A$$

Definición de mínimo GLOBAL de una función $y = f(x)$

Sea

$$f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = y$$

Decimos que f tiene un máximo GLOBAL o ABSOLUTO en $x = x_0$ si y solo si

$$f(x_0) \leq f(x),$$

$$\forall x \in A$$

Técnica para determinar extremos relativos de una función $y = f(x)$

Teorema . - Si f tiene un extremo relativo o local en $x = x_0$ ENTONCES \Rightarrow

$$f'(x_0) = 0 \quad \vee \quad f'(x_0) \text{ no existe}$$

Por contrarrecíproca :

Si $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in \text{Dom}(f)$ y $f'(x)$ existe $\forall x \in \text{Dom}(f)$
entonces f no posee extremos relativos en el dominio dado.
 \Rightarrow

Nota:

Si $y = f(x)$ tiene puntos para los cuales $f'(x)$ se anula o no existe, entonces esos puntos constituyen CANDIDATOS a extremos relativos. Estos puntos reciben el nombre de puntos críticos de 1^{era} especie.

Definición: Sea $y = f(x)$ una función continua en $\mathcal{V}_\delta(x_0)$, $x_0 \in \text{Int}(\text{Dom}(f))$. Si

$f'(x_0) = 0$ ó $f'(x_0)$ no existe, llamamos

a $x = x_0$ punto crítico de primera especie de la función f . Los puntos críticos son CANDIDATOS a extremos relativos de f .

Ejemplos: (puntos donde la función f podría tener extremos relativos)

Determine los puntos críticos de primera especie de las sgtes funciones:

a) $y = \ln x$

b) $y = x^{2/3}$

c) $y = x^{31}$

d) $y = x^3 - x + 2$

Solución:

a) $y = \ln x = f(x)$

$\text{Dom}(f) = x \in]0, \infty[$

$f'(x) = \frac{1}{x}$ $\begin{cases} \rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x \in \emptyset \\ \rightarrow f'(x) = \neq \Rightarrow x = 0 \Rightarrow x \in \emptyset \end{cases}$

NO existen puntos críticos de 1^{er} especie

(f no tiene extremos relativos)
($x = 0$ pero no pertenece a $\text{Int}(\text{Dom}(f))$)

$$b) \quad y = x^{2/3}$$